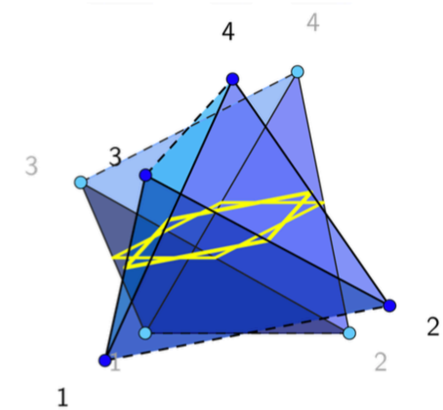
Höhere Algebra
Interaktive, genetische und visuelle Zugänge

Timo Leuders

$$x^4 - 6x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$$



Leuders, T. (2016). *Erlebnis Algebra*. Heidelberg, New York: Springer.

Leuders, T. (2017). *Modern algebra as an integrating perspective on school mathematics – an interactive genetic and visual approach.* Paper presented at the Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings.

Leuders, T. (2015). Gruppen als Modelle – Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Eds.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (pp. 217-231): Springer Fachmedien Wiesbaden.

Leuders, T. (2016). Subject matter analysis with a perspective on teacher education - the case of Galois theory as a theory of symmetry. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(Suppl 1), 163-191.

Algebra mit dem Blick nach vorn

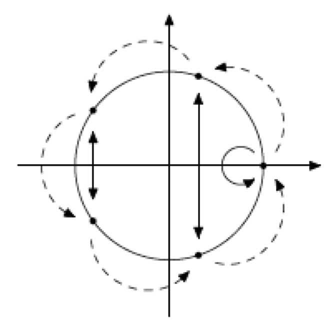
„Die Algebra wird von vielen Studierenden als sehr abstrakt empfunden. Daher haben sich die Autoren bemüht, die Ergebnisse und Begriffe mit zahlreichen Beispielen zu unterlegen.“

3.1.5 Die Diedergruppen

Für $n \geq 3$ sei $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, und $E_n = \langle \varepsilon_n \rangle = \{1, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n^{n-1}\}$ sei die (multiplikative) Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Das sind die Ecken eines regulären n-Ecks in $\mathbb{C}$ (vgl. Beispiel 2.2 auf Seite 23). Ferner seien α und β die wie folgt gegebenen Permutationen von E_n:

$$\alpha(x) = x^{-1} = \overline{x} \quad \text{und} \quad \beta(x) = \varepsilon_n\, x \quad (x \in E_n)\,.$$

Es ist α die Spiegelung an der reellen Achse und β die Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ um den Nullpunkt von $\mathbb{C}$. Man beachte die rechtsstehende Skizze.



Die von α und β erzeugte Untergruppe D_n von S_{E_n} wird für jedes $n \geq 3$ **Diedergruppe** genannt. Es gilt offenbar:

$$o(\alpha) = 2 \quad \text{und} \quad o(\beta) = n\,.$$

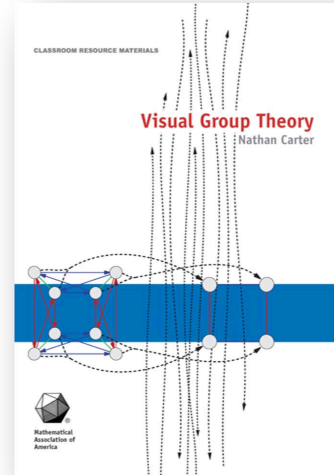
Wegen $o(\alpha) = 2$ gilt somit $\alpha = \alpha^{-1}$.
Für jedes $x \in E_n$ gilt

$$\alpha\,\beta\,\alpha^{-1}(x) = \alpha(\varepsilon_n\, x^{-1}) = (\varepsilon_n\, x^{-1})^{-1} = \varepsilon_n^{-1}\, x = \beta^{-1}(x)\,,$$

sodass für α und β die folgenden Relationen gelten:

$$\boxed{\alpha\,\beta\,\alpha^{-1} = \beta^{-1}\,, \quad \alpha\,\beta = \beta^{-1}\,\alpha\,, \quad \beta\,\alpha = \alpha\,\beta^{-1}\,.}$$

Algebra mit dem Blick zur Seite



If you are interested in learning about group theory in a relaxed, intuitive way, then this book is for you. Herein you will find clear, illustrated exposition about the basics of the subject, which will give you a solid foundation of intuitions, images, and examples on which you can build with further study.

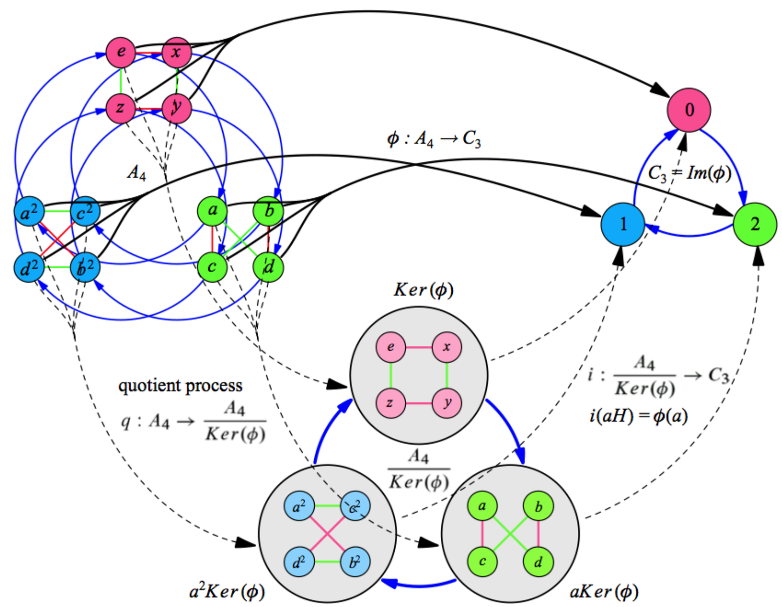
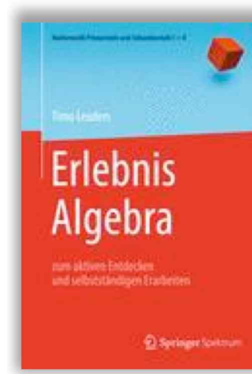


Figure 8.14. The Fundamental Homomorphism Theorem (Theorem 8.5) exemplified using the group A_4 and the quotient map ϕ whose kernel is the subgroup $\{e, x, y, z\}$ of A_4

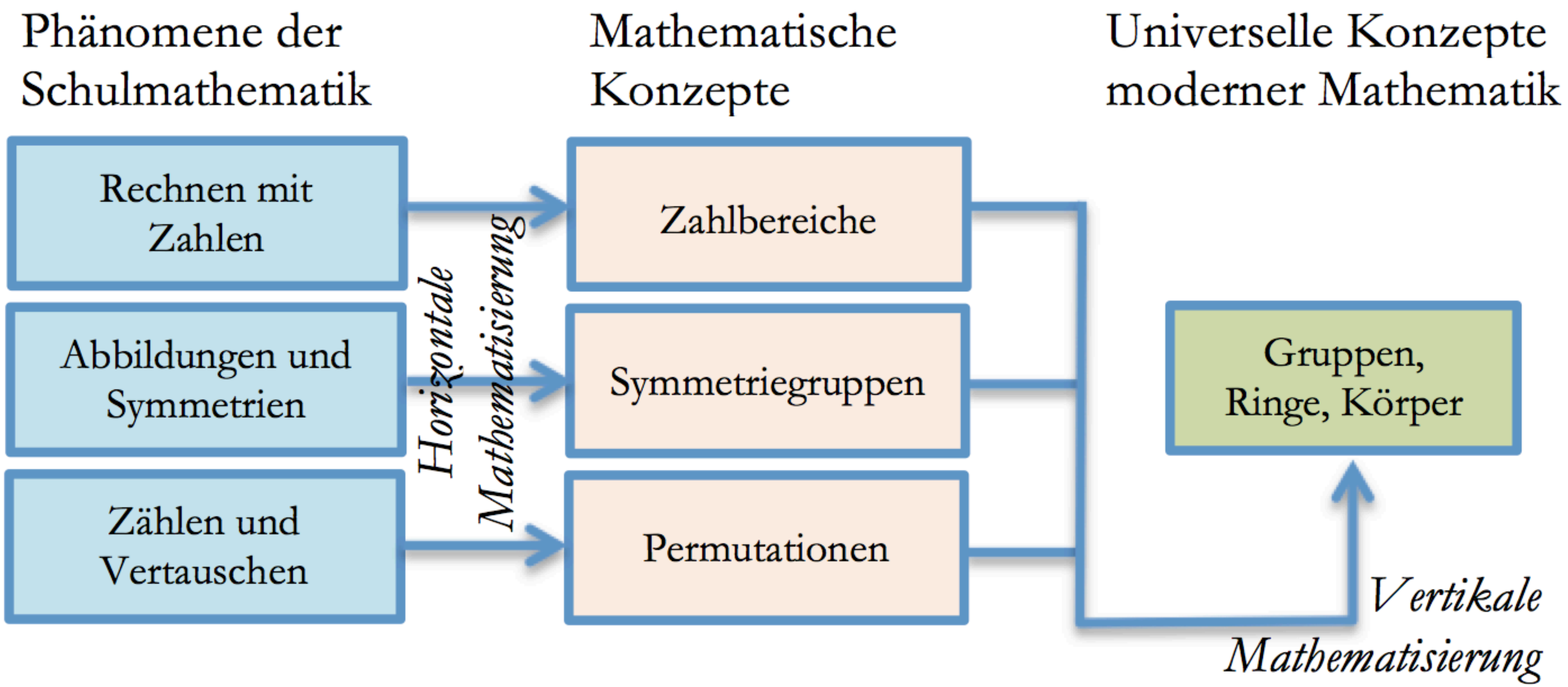
Algebra mit dem „Blick zurück“

- Aus welchen Problemen entstehen die relevanten Konzepte? (horizontale Mathematisierung)
- Welche Phänomene/Situationen/Beispiele (auch aus der Schule) werden auf universelle Weise beschrieben? (vertikale Mathematisierung)
- Welche sind die Kernideen? Welches sind relevante Grundvorstellungen? (Sinnstiftung)
- Was lernt man über mathematische Denkweisen/Erkenntnis? (epistemische Reflexion)



Orientierungspunkte

- Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse
  (Treffers, 1977; Freudenthal 1991, RME; Leuders et al 2011)
- Visualisierungen beim entdeckenden Lernen
  (z.B. de Jong & van Joolingen, 1998)
- Stoffdidaktische Analyse mit Blick auf Lehrerbildung
  (Klein 1908; MKT, Rowland & Ruthven 2008; Leuders, 2016)
- Forschung zum Lernen der höheren Algebra
  (Weber & Larsen 2008)


Phänomene der Schulmathematik
Mathematische Konzepte
Universelle Konzepte moderner Mathematik
Rechnen mit Zahlen
Abbildungen und Symmetrien
Zählen und Vertauschen
Horizontale Mathematisierung
Zahlbereiche
Symmetriegruppen
Permutationen
Gruppen, Ringe, Körper
Vertikale Mathematisierung

Anknüpfungen/ Motivation

	Verknüpfungen in Arithmetik und Geometrie	Verknüpfungen von (Selbst)Abbildungen, symbolische Darstel-
Horizontale Mathematisierung	Symmetrien von Figuren, Geometrische Abbildungen	Symmetriegruppen, Gruppentafeln, Untergruppen
	Arithmetische Operationen, Addition, Multiplikation, Division	Restklassen Faktorgruppen Erzeugte Gruppen
	Kombinationen Vertauschungen	Permutationen Zykeldarstellung Symmetrische Gruppe
Vertikale Mathematisierung	Strukturen von Operationen	Gruppen, Halbgrup-pen, Gruppenaxiome
Horizontale Mathematisierung	Matrizen, Symmetrien von ebenen Mustern	Lineare Abbildungen, Translationen, ebene Symmetrietypen
	Lösungen von Gleichungen, Wurzeln,	Lösungsformeln kubische Gleichungen Komplexe Zahlen
Vertikale Mathematisierung	Zusammenhänge zwischen Operationen, „Addieren“ und „Multiplizieren“	Ringe, Körper, Kör-pererweiterungen, Polynomringe
	Vertauschungssymmetrie von Gleichungen und ihre Lösung mit Wurzeln	Galoistheorie: Symmet-rie von Lösungen, Lösbarkeit durch Radi-

Integrierte Anwendung

Horizontales Mathematisieren →

Vertikales Mathematisieren ↓

Arithmetische Operationen	Handlungen in Beziehung setzen (z.B. Umkehren, Reihenfolge tauschen)	*mathematisieren* → ← *realisieren*	Strukturelle Eigenschaften der Operationen (z.B. Kommutativität, Inverse)
			↑↓
Geometrische Abbildungen	Beziehungen zwischen Bewegungen (z.B. Umkehren, Invarianz)	*mathematisieren* → ← *realisieren*	Strukturelle Eigenschaften der Verknüpfung (z.B. Assoziativität, Invarianz)
			↑↓
Permutationen	Beziehungen zwischen Tauschhandlungen (z.B. Umkehrung, Kombination)	*mathematisieren* → ← *realisieren*	Strukturelle Eigenschaften der Verknüpfung (z.B. Inverse, Parität)
			↑↓
			Gruppe (in axiomatischer Charakterisierung)

(Treffers, 1977; Freudenthal 1991; Leuders 2015)

Symmetrie

Kernidee

- In einer Situation taucht auf bestimmte Weise das *Gleiche* wieder woanders auf. (Wiederholung)
- Man kann das *Ganze* erzeugen, indem man nur *Teil* immer wieder auf eine bestimmte Weise bewegt. (Erzeugung)
- Das Ergebnis ist dabei eine Figur, die bei bestimmten Bewegungen *unverändert* hervorgeht. (Invarianz)

Definition

Eine Symmetrie g der Figur ist dann eine besondere Kongruenzabbildung, nämlich eine Abbildung $g \in K$, die die Figur invariant lässt

$$g(M) = M$$

Man nennt dies auch eine *Deckabbildung*. Als *die Symmetrie* eines Objektes *M* bezeichnet man oft die *Gesamtheit* aller seiner Symmetrieabbildungen

$$G_M = \{ g \in K \mid g(M) = M \}$$

Situationen mit räumlichen Objekten	$\xrightarrow{\text{mathematisieren}}$ $\xleftarrow[\text{interpretieren}]{}$	geometrische Figuren
↑↓		↑↓
Bewegungen von (starren) Objekten (z.B. Verschieben, Drehen)	$\xrightarrow{\text{mathematisieren}}$ $\xleftarrow[\text{interpretieren}]{}$	Abbildungen (z.B. Isometrien)
↑↓		↑↓
Hintereinanderausführung von Bewegungen	$\xrightarrow{\text{mathematisieren}}$ $\xleftarrow[\text{interpretieren}]{}$	Verkettung von Abbildungen
↑↓		↑↓
Multiple Beziehungen zwischen Bewegungen (z.B. Umkehren)	$\xrightarrow{\text{mathematisieren}}$ $\xleftarrow[\text{interpretieren}]{}$	Strukturelle Eigenschaften der Verknüpfung (z.B. Assoziativität, Invarianz)

$\circ$	1	s
1	1	s
s	s	1

$\circ$	1	d_{180}	s_a	s_b
1	1	d_{180}	s_a	s_b
d_{180}	d_{180}	1	s_b	s_a
s_a	s_a	s_b	1	d_{180}
s_b	s_b	s_a	d_{180}	1

$\circ$	1	d_{120}	d_{240}	s_a	s_b	s_c
1	1	d_{120}	d_{240}	s_a	s_b	s_c
d_{120}	d_{120}	d_{240}	1	s_b	s_c	s_a
d_{240}	d_{240}	1	d_{120}	s_c	s_a	s_b
s_a	s_a	s_c	s_b	1	d_{240}	d_{120}
s_b	s_b	s_a	s_c	d_{120}	1	d_{240}
s_c	s_c	s_b	s_a	d_{240}	d_{120}	1

In der Menge G_M aller Symmetrien einer Figur M ist die Verknüpfung von Abbildungen $\circ$ eine binäre Operation: Zu den beiden Kongruenzabbildungen $f,g \in S_M$ wird die Abbildung $g \circ f \in G_M$ definiert durch $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Diese Operation hat die Eigenschaften:

(G_0) $\forall f,g \in G_M: f \circ g \in G_M$ (Abgeschlossenheit)

(G_1) $\forall f,g,h \in G_M: f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (Assoziativität)[3]

(G_2) $\exists\ id \in G_M \forall f \in G_M: f \circ id = id \circ f = f$ (Existenz eines neutralen Elementes)

(G_3) $\forall f \in G_M \exists g \in G_M: g \circ f = f \circ g = id$ (Existenz inverser Elemente)

Man nennt die Menge G_M zusammen mit der Operation $\circ$ auch die *Symmetriegruppe* $(G_M, \circ)$ der Figur.

$(\mathbb{Z}_6,+)$

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

$(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$

·	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

$(D_3,\circ)$

$\circ$	id	r	r^2	s_1	s_2	s_3
id	id	r	r^2	s_1	s_2	s_3
r	r	r^2	id	s_3	s_1	s_2
r^2	r^2	id	r	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	id	r^2	r
s_2	s_2	s_3	s_1	r	id	r^2
s_3	s_3	s_1	s_2	r^2	r	id

$(S_3,\circ)$

$\circ$	(1)	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
(1)	(1)	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
(123)	(123)	(132)	(1)	(13)	(12)	(23)
(132)	(132)	(1)	(123)	(23)	(13)	(12)
(12)	(12)	(23)	(13)	(1)	(132)	(123)
(23)	(23)	(13)	(12)	(123)	(1)	(132)
(13)	(13)	(12)	(23)	(132)	(123)	(1)

$(\mathbb{Z}_4,+)$

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$(\mathbb{Z}_5^*,\cdot)$

·	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]

$(\mathbb{Z}_8^*,\cdot)$

·	[1]	[3]	[5]	[7]
[1]	[1]	[3]	[5]	[7]
[3]	[3]	[1]	[7]	[5]
[5]	[5]	[7]	[1]	[3]
[7]	[7]	[5]	[3]	[1]

D_2

$\circ$	id	d	s_1	s_2
id	id	d	s_1	s_2
d	d	id	s_2	s_1
s_1	s_1	s_2	id	d
s_2	s_2	s_1	d	id

$R_4 \subset D_4$

$\circ$	1	r^2	r	r^3
1	1	r^2	r	r^3
r^2	r^2	1	r^3	r
r	r	r^3	r^2	1
r^3	r^3	r	1	r^2

$U \subset S_4$

$\circ$	(1)	(13)	(24)	(13)(24)
(1)	(1)	(13)	(24)	(13)(24)
(13)	(13)	(1)	(13)(24)	(24)
(24)	(24)	(13)(24)	(1)	(13)
(13)(24)	(13)(24)	(24)	(13)	(1)

Vertikale Mathematisierung

(1) Abstrakter Gruppenbegriff

(2) Isomorphietypen

$$\begin{array}{ccc} r & \xrightarrow{\varphi} & (123) \\ s_1 & \xrightarrow{\varphi} & (12) \\ \downarrow \circ & & \downarrow \circ \\ s_3 & \xrightarrow{\varphi} & (13) \end{array}$$

$$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

Größe $n = \lvert G \rvert$ der Gruppe G:	1	2	3	4	5	6	...
mögliche Isomorphietypen	$\{1\}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_6$	...
		D_1		$D_2 \cong V_4$		$D_3 \cong S_3$	...
		?	?	?	?	?	

(3) Ausloten der Axiome

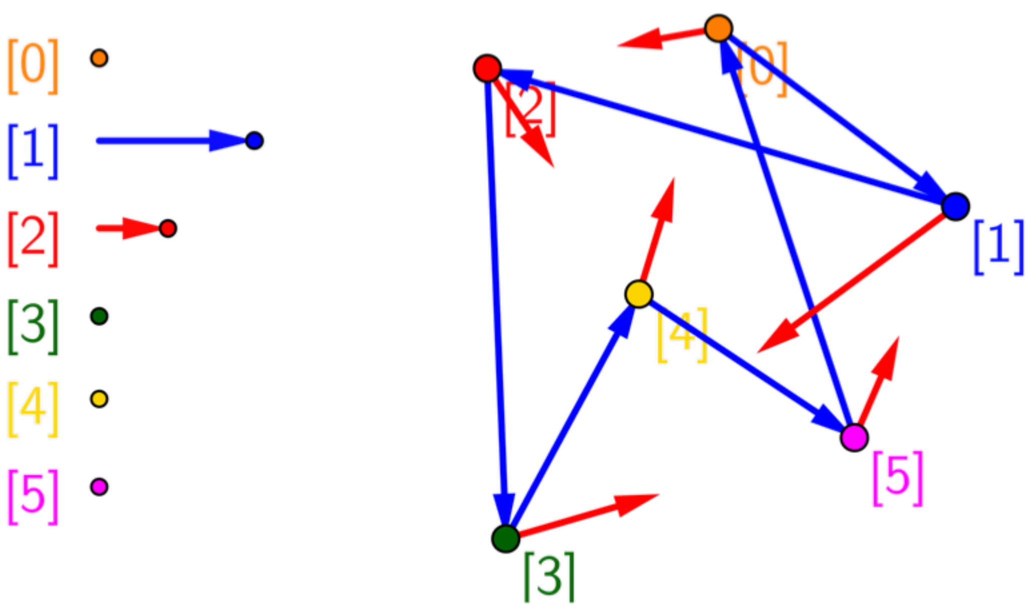
	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	e	e

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

Visualisierung und interaktive Erkundungung: „Satz von Lagrange“ - „Normalteiler“



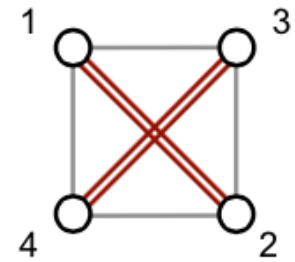
+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

„Cayley-Diagramme“

$\oplus$	00	10	20	01	11	21	02	12	22
00	00	10	20	01	11	21	02	12	22
10	10	20	00	11	21	01	12	22	02
20	20	00	10	21	01	11	22	02	12
01	01	11	21	02	12	22	00	10	20
11	11	21	01	12	22	02	10	20	00
21	21	01	11	22	02	12	20	00	10
02	02	12	22	00	10	20	01	11	21
12	12	22	02	10	20	00	11	21	01
22	22	02	12	20	00	10	21	01	11

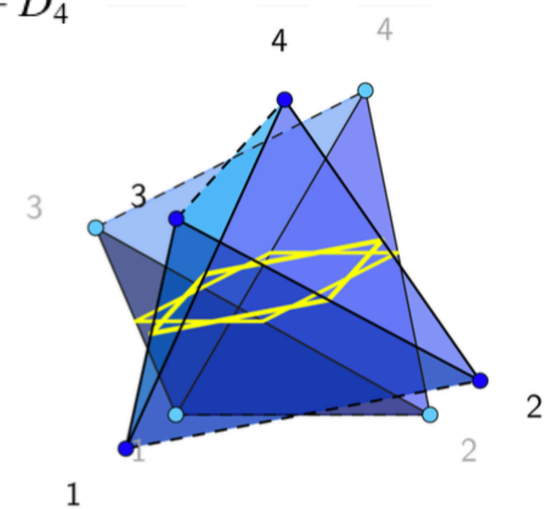
$\circ$	1	s_1	r^2	s_3	r	s_4	r^3	s_2
1	1	s_1	r^2	s_3	r	s_4	r^3	s_2
s_1	s_1	1	s_3	r^2	s_4	r	s_2	r^3
r^2	r^2	s_3	1	s_1	r^3	s_2	r	s_4
s_3	s_3	r^2	s_1	1	s_2	r^3	s_4	r
r	r	s_2	r^3	s_4	r^2	s_1	1	s_3
s_4	s_4	r^3	s_2	r	s_3	1	s_1	r^2
r^3	r^3	s_4	r	s_2	1	s_3	r^2	s_1
s_2	s_2	r	s_4	r^3	s_1	r^2	s_3	1

$$x^4 - 6x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$$



$$x_1 + x_2 = 0\,,\;\; x_3 + x_4 = 0$$

$$G \subseteq \{\,(1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\,\} = D_4$$



$\mathbb{Q}$	$\rightarrow$	dazu $\sqrt{7}$	$\rightarrow$	dazu $\sqrt{3+\sqrt{7}}$	$\rightarrow$	dazu $\sqrt{3-\sqrt{7}}$
D_4	$\rightarrow$	V_4	$\rightarrow$	$\mathbb{Z}_2$	$\rightarrow$	E
		$= \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$		$= \{(1), (34)\}$		$= \{(1)\}$

D_4 V_4 $\mathbb{Z}_2$ E

∘	(1)	(13)(24)	(13)	(24)	(12)(34)	(14)(23)	(1432)	(1234)
(1)	(1)	(13)(24)	(13)	(24)	(12)(34)	(14)(23)	(1432)	(1234)
(13)(24)	(13)(24)	(1)	(24)	(13)	(14)(23)	(12)(34)	(1234)	(1432)
(13)	(13)	(24)	(1)	(13)(24)	(1432)	(1234)	(12)(34)	(14)(23)
(24)	(24)	(13)	(13)(24)	(1)	(1234)	(1432)	(14)(23)	(12)(34)
(12)(34)	(12)(34)	(14)(23)	(1234)	(1432)	(1)	(13)(24)	(24)	(13)
(14)(23)	(14)(23)	(12)(34)	(1432)	(1234)	(13)(24)	(1)	(13)	(24)
(1432)	(1432)	(1234)	(14)(23)	(12)(34)	(13)	(24)	(13)(24)	(1)
(1234)	(1234)	(1432)	(12)(34)	(14)(23)	(24)	(13)	(1)	(13)(24)

Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, http://www.springer.com/series/11632

Höhere Algebra für Lehramtsstudierende – genetisch verstehen und aktiv mathematisieren

Timo Leuders

Zusammenfassung

In der Schule wird klassische Algebra (Variablen und Gleichungen) betrieben, an der Hochschule wird moderne Algebra (mit ihren „Operationsstrukturen“) gelehrt. Studierende des Lehramtes sollten, die vielfältige Bezüge zwischen Schul- und Universitätsmathematik erleben und dabei erkennen, welche Abstraktionsleistung in der modernen Algebra steckt, aber auch, wie diese Abstraktion aus konkreten Situationen und Problemen hervorgegangen ist. Es wird ein Lehrkonzept vorgestellt, das didaktisch auf sinnstiftende, genetische Zugänge zu algebraischen Strukturen setzt und methodisch eine hohe Studierendenaktivierung durch interaktive Explorationsumgebungen, Forschungshefte und flipped classroom realisiert.

1 Einleitung

Die universitäre Algebra ist eine Schlüsselveranstaltung. Sie liefert einen vereinheitlichenden Blick auf die Beschreibung zentraler Operationsstrukturen (vor allem Gruppen, Ringe und Körper), welche bereits zuvor immer wieder aufgetreten waren und die nachfolgend in allen mathematischen Fachgebieten und anwendenden Disziplinen als fundamentales Werkzeug dienen. Insofern wird die Algebra in der Hochschule in der Regel mit einem „Blick nach vorn“ gelehrt, als Werkzeug für konzise Formalisierungen und strukturelle Analysen in den weiteren mathematischen Forschungen – dies allerdings sind Tätigkeitsbereiche, in die künftige Lehrkräfte nur noch selten vordringen. Ganz allgemein wird von Studierenden die Abstraktheit der Algebra als Verstehenshürde empfunden, man findet daher auch Behandlungen der Algebra, die einen „Blick zur Seite“ wagen, also mehr an der Vertiefung und Durchdringung als an der Abstraktion und Allgemeinheit arbeiten, beispielsweise die durchgehend um Vorstellungsaufbau bemühte „Visual Group Theory“ von Carter (2009). Das nachfolgend beschriebene Konzept einer modernen Algebra für Lehramtsstudierende will aber noch mehr, es will einen „Blick zurück“ werfen, d.h. die Begriffe der modernen Algebra aus ihrer Genese heraus entwickeln und dabei plausibel machen, wie diese Begriffe entstanden sind und welche Probleme sie (auch und insbesondere im Zusammenhang mit der elementaren Schulmathematik) lösen.

2 Rahmenbedingungen

Die konkret berichtete Veranstaltung richtete sich an Studierende des Lehramtes der Sekundarstufe 1 im vierten Semester, kann aber ebenso im gymnasialen Lehramt eingesetzt werden. Studierende hatten bereits Vorerfahrungen mit dem Gruppen- und Körperbegriff (z.B. über Abbildungen in der Geometrie oder über Körpereigenschaften von Zahlbereichen), aber nur wenig Gelegenheiten, die Kernidee der abstrakten Algebra, die universelle, von den konkreten Beispielen absehende Beschreibung von Operationsstrukturen, aus höherer Perspektive zu erleben und zu reflektieren. Verfügbar an Arbeitszeit waren 12 ECTS, die sich im Semester als 2 zweistündige Sitzungen (Präsenzstudium) und 4 Stunden Selbststudium gliederten. Als Arbeitsmaterial konnte auf das Lehrbuch „Erlebnis Algebra“ (Leuders, 2016)

Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,* http://www.springer.com/series/11632

zurückgegriffen werden, das allerdings auch nicht vollständig durchgearbeitet wurde. Der vorliegende Beitrag kann nur auszugsweise die didaktischen Überlegungen entfalten, die im Lehrbuch ausgeführt sind. Dafür können an dieser Stelle methodische Überlegungen und Erfahrungen berichtet werden, die über das didaktische Konzept des Lehrbuchs hinausgehen.

3 Didaktik und Methodik

3.1 Didaktische Gestaltung

Die Erarbeitung der Begriffe der modernen Algebra erfolgt nach dem genetischen Prinzip, genauer nach den Prinzipien der horizontalen und vertikalen Mathematisierung (Treffers, 1987; Freudenthal 1977; van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers 2014; Leuders et al. 2012). Bei der **horizontalen Mathematisierung** werden mathematische Begriffe als Lösungen konkreter, dem Lernenden gut zugänglicher Probleme entwickelt: Der Gruppenbegriff entsteht beispielsweise beim Versuch die Operationsstrukturen, die beim Umgang mit Zahlen entstehen, zu beschreiben – hier allerdings stößt man auf das didaktische Problem, dass diese Operationen bereits so vertraut sind, dass man neue problemhaltige Situationen jenseits der Schulmathematik schaffen muss, wie z.B. das Rechnen mit Resten, das zu reichhaltigen Strukturen und durchaus herausfordernden Problemen führen kann (Wann und wie kann man „Rest 10 durch Rest 3" teilen?). Hierbei entstehen kommutative Restklassengruppen (sogar Ringe) als effektive Beschreibungen konkreter Operationen.
Damit das Gruppenkonzept aber voll zur Geltung kommt, soll es im vorgestellten Konzept gleich zwei weitere Male durch horizontale Mathematisierung entstehen: einmal über die Operationsstrukturen, die bei geometrischen Deckabbildungen entstehen, ein weiteres Mal durch die Strukturen, mit denen man Permutationen beschreibt. Auf diese Weise entsteht die Gruppe dreimal als „Modell" für konkrete mathematische Situationen (eine ausführliche Analyse der Stufen dieser Abstraktion vom Handeln mit Objekten zur mathematischen Gruppenstruktur findet man bei Leuders, 2015). Die besondere mathematische Qualität der Gruppe als übergreifendem Begriff erschließt sich aber erst dann, wenn das Gemeinsame und universelle der Operationsstruktur deutlich wird: Dies geschieht als **vertikale Mathematisierung** durch Verallgemeinerung der Schemata, die in den verschiedenen Gruppenkonzepten zu finden sind, d.h. letztlich durch Herausschälen der definierenden Eigenschaften und der Reflexion ihrer Bedeutung (s. Abb.1).
Erst darauf aufbauend können Studierende einschätzen, was es bedeutet, von den definierenden Eigenschaften einer Gruppe als Axiome zu sprechen und neue Phänomene (wie z.B. Untergruppen, Nebenklassen oder Nullteiler in Ringen) sowohl bezogen auf konkrete Situationen als auch unabhängig von ihnen zu entdecken und zu untersuchen.
Das hier geschilderte didaktische Prinzip, das gewissermaßen die Kernidee der abstrakten Algebra wiederspiegelt, kann auch an anderen Inhalten wie z.B. Ringen und Körpern umgesetzt werden. Schließlich kann auch die Abstraktionsleistung der Galoistheorie aufbauend auf dem konkreten Problem des Gleichungslösens entfaltet werden (ausführliche stoffdidaktische Analysen hierzu bei Leuders, 2016). In diesem Beitrag soll dieser Ansatz an wenigen Beispielen illustriert werden.

Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, http://www.springer.com/series/11632

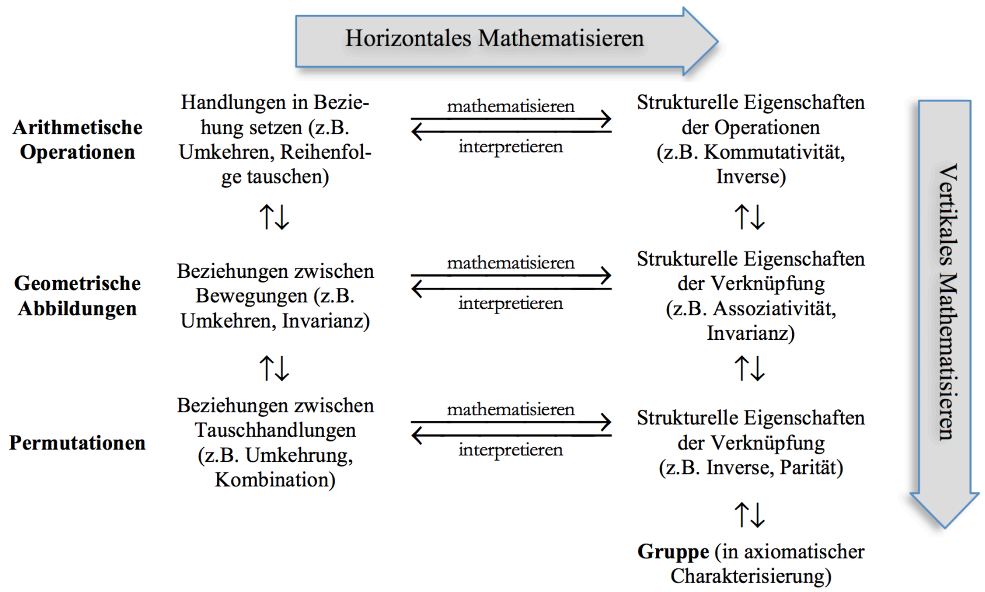


Abb.1. Aufbau algebraischer Konzepte durch horizontale und vertikale Mathematisierung

Weitere (fach)didaktische Bezüge, die der Konstruktion der Lehrveranstaltung zugrunde liegen, sind:

- die Nutzung von computergestützten, interaktiven Visualisierungen für die konkreten mathematischen Situationen: Dreh- und Schiebepuzzles für kombinatorische Situationen; interaktives Operieren an konkreten geometrischen Objekten; Visualisierung von modifizierten Zahlenräumen; interaktives Erkunden der Phänomene beim Operieren mit komplexen Zahlen; Wirkungen affiner Abbildungen auf ebene Figuren; u.v.m. Die jeweiligen Programme und Dateien können als Paket oder einzeln unter www.erlebnis-algebra.de heruntergeladen werden.
- die Erkenntnisse der Forschung zu Lernwegen und Lernhürden in der höheren Algebra (z.B. Weber & Larsen 2008).
- allgemeine Überlegungen zur stoffdidaktischen Analyse eines Gegenstands mit Blick auf die Lehrerbildung (*subject matter analysis with a perspective on education*, SMAPE, ausführlicher bei Leuders, 2016)

3.2 Methodische Gestaltung

Die Vermittlung der Kernideen der modernen Algebra für künftige Lehrkräfte hat nicht die vollständige Einführung des „formalen Apparats“ mit allen zentralen Definitionen und Sätzen im Blick, da Algebra in dieser Form später kaum von ihnen genutzt wird. Vielmehr sollen sie die Kernideen so vertieft verstehen, dass sie algebraische Strukturen auch in ihrer späteren Praxis erkennen und nutzen können. Das erfordert, dass von Beginn an Tätigkeiten wie Problemlösen, Erklären, Visualisieren, Explorieren, Abstrahieren etc. im Vordergrund stehen sollen. Diese aktive Befassung wurde in folgender Veranstaltungsform gefördert:

1. Schritt: Ca. 2-3 Stunden individuelles Selbststudium an **Erkundungen**, d.h. Aufgaben, bei denen interaktiv mit Computerapplets mathematische Phänomene exploriert werden. Die Entdeckungen, Vermutungen und offenen Fragen werden in einem digitalen Forschungsheft (Textdatei) notiert. Danach können die erklärenden Texte im Buch gelesen und die eigenen

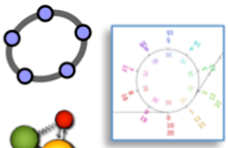
Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,* http://www.springer.com/series/11632

Erkenntnisse notiert werden. Diese digitalen Notizen werden von allen Studierenden auf eine Plattform gestellt.

2. Schritt: Der Lehrende schaut die Abgaben durch und verschafft sich einen Überblick über Ergebnisse, Schwierigkeiten und Fragen der Gruppe. Auf dieser Basis gestaltet er oder sie eine Präsenzveranstaltung, in der die Ergebnisse ausgetauscht, vorgestellt und schließlich durch präzisierte mathematische Definitionen und Sätze abgerundet werden. Dieses Vorgehen entspricht dem *flipped classroom,* wobei die Vorbereitung der Studierenden hier nicht durch ein Vorlesungsvideo zur Wissensvermittlung (was wenig genetisch wäre), sondern durch die individuelle Lektüre und Problembearbeitung geleistet wird. Die weiter unten dargestellten Erfahrungen zeugen von der hohen individuellen Aktivierung dieses Vorgehens.

3. Schritt: Die Studierenden schließen ihre Notizen im Forschungsheft ab, indem sie die wichtigsten Ergebnisse selbst zusammenfassen, und dabei auf ihre Fragen von zuvor eingehen können. Nach Abschluss umfangreicherer Lernphasen sollen sie auch eine übergreifende Reflexion des Lernstandes einfügen.

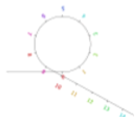
4. Schritt: In einer zweistündigen Präsenzübung (ohne vorheriges Selbststudium) werden Übungsaufgaben bearbeitet und diskutiert. Hier werden keine neuen Erkenntnisse erarbeitet, sondern die bisherigen in produktiven Aufgaben konsolidiert. Hier wird durchaus auch einmal „algebraisch gerechnet“, d.h. die Leistungen des neu entwickelten Kalküls erprobt.



→Programm
Zahlenstrahl_

Erkundung 3.3: Die ganzen Zahlen stellt man sich in der Regel als Zahlenstrahl vor.

Probieren Sie aus, wie gut sich diese Strategien und Vorstellungen übertragen lassen und wo sie ihre Grenze haben, weil der Zahlenkreis doch anders funktioniert.



Elemente a und b in einem Ring (also einer Struktur mit einer Addition und einer Multiplikation), für die $a \cdot b = 0$ (also das Nullelement der Addition) ist, obwohl weder $a = 0$ noch $b = 0$, heißen *Nullteiler*.

Als Beispiel für ein solches Spiel mit Axiomen können Sie nachfolgend sehen, wie die Bezüge zwischen stärkeren und schwächeren Axiomen ausgelotet werden. In (G_2) wird gefordert, dass es ein neutrales Element mit $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle Gruppenelemente a gibt. Aber reicht nicht vielleicht schon eine der beiden Anforderungen: $e \cdot a = a$ (man sagt auch, e sei ein linksneutrales Element)? Tatsächlich kann man sich Halbgruppen vorstellen, wie z.B. $(\mathbb{Z},*)$ mit $a*b=b$, bei denen jedes Element linksneutral, aber keines rechtsneutral ist. Allerdings: Man könnte (G_1) auch so formulieren:

Übung 3.3: Untersuchen Sie die Gleichung $x^2 = a$ in verschiedenen $\mathbb{Z}_n$. Für welche a ist diese Gleichung lösbar? Wann besitzt sie keine, eine oder sogar mehrere Lösungen? Erkennen Sie eine Systematik?

Abb.2: Erkundung, Definitionen/Sätze, Reflexionen und Übungen als didaktische Elemente

4 Umsetzung – Beispiele – Erfahrungen

Die Studierenden haben ihren Lernprozess in Forschungsheften (digitalen Textdokumenten) festgehalten, in die sie auch Bildschirmausschnitte ihrer Erkundungen einkopiert haben. Das so auf 50 bis 100 Seiten angewachsene Forschungsheft wurde gleich mehrfach genutzt: Als

Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, http://www.springer.com/series/11632

Dokumentation des Lernprozesses für die eigene Orientierung, als Information für den Lehrenden über den Arbeitsstand und abschließend als Prüfungsleistung. Hierzu haben die Studierenden das Heft zum Teil besser strukturiert und formatiert und an zwei für sie wichtigen Stellen übergreifende Reflexionen eingefügt. Das Ergebnis wurde als Portfolio abgegeben und bewertet.

Anstelle einer abstrahierenden Schilderung der Erfahrungen aus Dozierendensicht sollen zwei Ausschnitte eines Forschungsheftes (die ausgearbeiten Reflexionen) einen Einblick darin erlauben, wie reichhaltig und vielfältig die Lernprozesse waren. Die konkreten Aufgaben kann man im E-Book unter https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-662-46297-3 nachlesen. Den beiden Auszügen gehen jeweils Dutzende Seiten mit individuellen Beispielen, Explorationen und Irrwegen voraus (zu den Wirkungen des Einsatzes solcher Forschungshefte siehe Holzäpfel, Bernack, Leuders & Renkl, 2013).

Das erste Beispiel zeigt die Überlegungen (Originalformulierungen wurden sprachlich leicht geglättet), die eine horizontale Mathematisierung – vom Rechnen mit Resten bis zur Restklassengruppe – beschreiben. Man erkennt die stützende Rolle der Visualisierung und die Herausforderungen, die auch vermeintlich kleine Fragestellungen generieren.

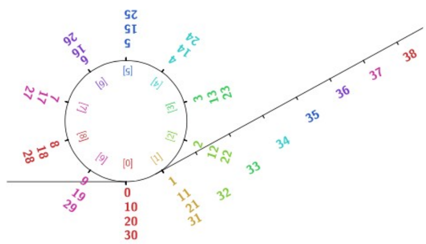
3.6.1 Abschließende Zusammenfassung / Reflexion nach Vorlesung und Übung:

In diesem Kapitel stehen das Rechnen mit Restklassen und Bildung von Gruppen aus Restklassen im Mittelpunkt. Die Mengen der Restklassen $(\mathbb{Z}n, +)$ und $(\mathbb{Z}n, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$ wurden dabei genauer auf Strukturen, Muster, Gemeinsamkeiten, Unterschiede und auf Eigenschaften einer Gruppe untersucht. Es wurden zentrale Konzepte entwickelt, wie Verknüpfungstabellen, Zahlenstrahl zu einem Kreis aufrollen, Eigenschaften einer Gruppe, invertierbare Elemente und Nullteiler.

$(\mathbb{Z}_6, +)$

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

Verknüpfungstabellen geben einen guten Überblick über die Elemente, die eine Menge enthält und über die Ergebnisse, wenn man die einzelnen Elemente miteinander verknüpft – beispielsweise die Menge $\mathbb{Z}6$ mit der Verknüpfung Addition. Mit Hilfe dieser Verknüpfungstabelle erkennt man alle möglichen Ergebnisse auf den ersten Blick sowie Strukturen und Muster. Man erkennt zum Beispiel, dass in jeder Reihe und Spalte jedes Element nur einmal vorkommt.



Ein weiteres Verfahren, welches man in dieser Erkundung verwendet, ist das Aufrollen eines Zahlenstrahls zu einem Kreis. Bei diesem Verfahren erkennt man gut, welche Zahlen zur gemeinsamen Restklasse gehören. In diesem Beispiel in $\mathbb{Z}8$ erkennt man beispielsweise gut, dass die Zahlen 8, 18, 28 alle zu der Restklasse [8] gehören. Außerdem hilft dieses Verfahren bei dem Rechnen mit Resten. Man erkennt mit Hilfe des Pfeiles, wenn man zu einer Zahl mit dem Rest [4] eine Zahl mit einem Rest [5] hinzuaddiert, dies eine Zahl mit dem Rest [1] ergibt
Um zu überprüfen ob $(\mathbb{Z}n, +)$ und $(\mathbb{Z}n, \cdot)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe ist, wurden die Gruppeneigenschaften Abgeschlossenheit, Existenz eines neutralen Elementes, Existenz von inversen Elementen und das Assoziativgesetz überprüft. Nur wenn alle Eigenschaften erfüllt sind, bildet die Menge $\mathbb{Z}n$ mit der Addition oder Multiplikation eine Gruppe. Die Menge $\mathbb{Z}n$ mit $n \in \mathbb{N}$ bildet mit der Addition eine Gruppe. Bei der Verknüpfung Multiplikation mit der Menge $\mathbb{Z}n$ ist dies nicht der Fall. Es existiert nicht für jedes Element einer Menge $\mathbb{Z}n$ ein inverses Element. Hier wird dann das Konzept der Nullteiler angewendet. Alle Elemente der Menge

ℤn ,die Nullteiler sind müssen ausgeschlossen werden. Die Menge ℤn mit der Verknüpfung Multiplikation bilden also nur eine Gruppe, wenn die Nullteiler ausgeschlossen werden.
Betrachtet man beispielsweise die Menge ℤ6 mit der Verknüpfung Multiplikation. Diese Menge enthält die Elemente [0], [1], [2], [3], [4], [5]. Diese Menge erfüllt aber nicht die Eigenschaft, dass es zu jedem Element ein inverses Element existiert. Das neutrale Element in diesem Beispiel ist [1], es gibt also kein Element, welches multipliziert mit [2] das neutrale Element [1] ergibt. [2] ist also ein Nullteiler. [2] · [3] = 0 und somit sind die Elemente [2] und [3] Nullteiler. Die [4] ist auch ein Nullteiler, da~~s~~ [4] · [3] = [0] ergibt. Die Elemente [0], [2], [3] und [4] sind also Nullteiler. Schließt man diese Elemente aus, so bildet die Menge mit den Elementen [1] und [5] eine Gruppe.
Nicht alle diese Konzepte sind in der Schule anwendbar. Gruppen werden in der Schule nicht behandelt. Verknüpfungstabellen sind in der Schule gut anwendbar, da sie einen guten Überblick der Ergebnisse darstellen. Auch in der Schule wird mit Resten gerechnet. Dies beginnt schon in der Primarstufe mit leichten Rechenaufgaben wie zum Beispiel 19 : 8 = 3 Rest 1. In der Sekundarstufe I wird mit ganzen Zahlen gerechnet. Es ist dann wichtig als Lehrperson zu wissen warum zum Beispiel -1 in die Restklasse 3 + 4 ℤ passt, wie ich in der Erkundung ausführlich beschrieben habe.
Mein Weg zur Erkenntnis in diesen Erkundungen war ein induktives Vorgehen. Ich untersuchte zunächst einige Beispiele und erkannte dann Gemeinsamkeiten, Strukturen, Muster aber auch Unterschiede. Mit Hilfe dieser ersten Erkenntnisse versuchte ich dann eine Theorie oder eine Vermutung zu formulieren. Anschließend überprüfte ich meine Vermutungen mit den Lösungen aus dem Buch. Manchmal waren meine Vermutungen richtig. War meine Vermutung falsch, versuchte ich mit Hilfe des Buches eine neue richtige Vermutung aufzustellen. Wie beispielsweise bei Divisionsaufgaben. Zunächst hatte ich Probleme bei Divisionsaufgaben von Restklassen. Ich konnte mir nur schwer vorstellen, was gerechnet wird und welche Bedeutung das Ergebnis hat. Um mir dies besser vorstellen zu können rechnete ich zunächst ein Beispiel. Ich stellte mir die Aufgabe [28] : [3] in ℤ8. Meine Überlegungen dazu waren folgende: [28] : [3] = [9] Rest 1 =[8] + [1] + [1] = [0] + [1] + [1] =
[2]. Somit ergibt sich eine~~n~~ Rest von [2]. Wie sich nach dem Lesen der Lösungen herausstellte, war diese Vermutung falsch. Im Buch wurde eine andere Divisionsaufgabe gestellt: [4] : [6] = [2], da [6] · [2] = [4]. Die Divisionsaufgabe wird mit Hilfe einer Multiplikationsaufgabe gelöst. Dieses Beispiel versuchte ich auf mein Beispiel zu übertragen: [28] = [4] Somit lautet die Aufgabe [4] : [3] = x → x · 3 = 4. Ich stellte mir also die Frage: Wie oft muss ich 3+3+…+3 addieren bis ich als Ergebnis ein Rest von 4 erhalte?
[3] + [3] + [3] + [3] = [4] · [3] = [12] = [8] + [4]= [0] + [4] = [4] → [4] · [3] = [4] → [4] : [3] = [4] → x= [4]. Somit ergab sich also ein Rest von [4] und nicht wie Anfangs angenommen ein Rest von [2]. Um mir dieses Ergebnis und den Rechenweg besser vorstellen zu können, visualisierte ich dies: Der erste Pfeil beginnt bei [0] und jeder Pfeil ist [3] lang. Ich addierte so lange Pfeile bis ein Pfeil bei dem Rest [4] angekommen ist. Nach vier Pfeilen kam ich bei dem Rest [4] an. Das Ergebnis lautet somit [4].
Für meinen Matheunterricht nehme ich durch diesen Erkenntnisgewinn mit, dass die Schüler und Schülerinnen durch Probieren Vermutungen aufstellen und somit selbst auf das richtige Ergebnis kommen können. Allerdings muss darauf geachtet werden falsche Vermutungen und Theorien richtig zu stellen.
Ich habe diese Erkundungen aus dem Kapitel 3 als einen Meilenstein ausgewählt, da ich das Rechnen in Restklassen interessant finde und Schüler und Schülerinnen schon in der Primarstufe damit konfrontiert werden und auch noch in der Sekundarstufe I. Eine besonders herausstechende Situation war, als wir in der Übung die Menge $\mathbb{Z}_n$ mit der Verknüpfung Multiplikation erarbeitet haben. Durch diese Übung kann ich Nullteiler erkennen und weiß schnell welche Elemente einer Menge $\mathbb{Z}_n$ eine Gruppe ($\mathbb{Z}_n$*, ·) bilden. Besonders interessant finde ich auch, dass die Verknüpfungstabelle der Gruppe ($\mathbb{Z}_4$, +) und die Verknüpfungstabelle der Drehungen des Quadrates die gleiche Struktur zeigen:

($\mathbb{Z}_4$,+)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Verknüpfungstabelle der Drehungen des Quadrates (○)

○	id	d90	d180	d270
id	id	d90	d180	d270
d90	d90	d180	d270	id
d180	d180	d270	id	d90
d270	d270	id	d90	d180

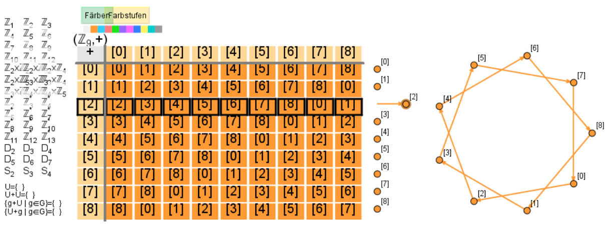
Ich denke meine Schüler und Schülerinnen können solche Erlebnisse haben, wenn ich als Lehrperson neu Gelerntes mit bereits Gelerntem verknüpfe und so Zusammenhänge schaffe. Dies ist nicht immer möglich, aber wenn es möglich ist, ist es sinnvoll den Schülern und Schülerinnen Zusammenhänge zwischen dem neu Gelernten und dem bereits Gelernten aufzuzeigen, da sich die Schüler und Schülerinnen das neu Gelernte so besser merken können.

Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, http://www.springer.com/series/11632

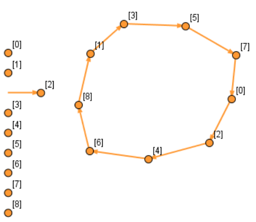
Das Beispiel zeigt, wie breit gefächert die Reflexionen zu der Qualität von Repräsentationen und der Verknüpfung mit schulischen Inhalten ist. Die Studierende baut dabei bereits fachdidaktisches und curriculares Wissen auf, der „Blick zurück" gelingt. Zugleich werden die Restklassen als mathematische Strukturen nicht nur formal, sondern anhand konkreter Beispiele und Situation reflektiert und verstanden.

Das zweite Beispiel zeigt dieselbe Studierende gegen Schluss der Veranstaltung, wenn das Gruppenkonzept bereits eine vertikale Mathematisierung hinter sich hat und abstrakte Gruppen auf ihre Eigenschaften untersucht werden. Das hier angedeutete interaktive Applet ermöglicht eine Exploration unterschiedlicher Gruppentafeln sowie die gleichzeitige Darstellung von Cayley-Diagrammen. Diese generieren Phänomene, die allgemeinen Erkenntnissen über endliche Gruppen, wie z.B. die Gleichmächtigkeit von Nebenklassen oder den Satz von Lagrange entdecken lassen.

Diese Erkundung 5.5 handelt von Erzeugersystemen und Cayley – Graphen sowie von Untergruppen und Nebenklassen.
Das zentrale Konzept, welches man hier anwendet sind die Cayley – Graphen.
Es wird ein Erzeugersystem ausgewählt und auf ein Element angewendet. Mit Hilfe des Cayley – Graphen untersucht man dann Strukturen der Gruppen und bekommt so eine andere Sicht auf die Gruppen.

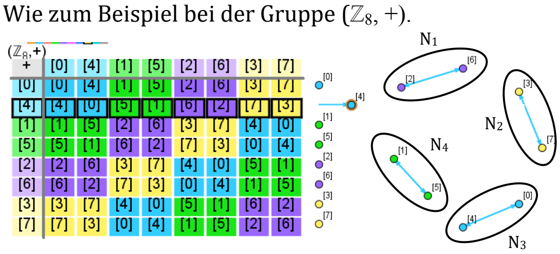


Wendet man zum Beispiel das erzeugende Element [2] auf die Elemente der Gruppe ($\mathbb{Z}_9$, +) an, kann man erstaunliches erkennen. Man kann erkennen, dass das neutrale Element von [2] die [7] ist, da die Pfeile, die von dem neutralen Element weg gehen, bei der [2] und bei der [7] enden. Außerdem erkennt man die Abgeschlossenheit gut. Dies kann man noch besser erkennen, wenn man die Pfeile des Cayley – Graphen umsortiert.



Hier kann man gut sehen, dass die Gruppe ($\mathbb{Z}_9$, +) abgeschlossen ist. Jede Zahl wird getroffen. Hier kann man auch gut erkennen, wie die [2] die ganze Gruppe erzeugt. Es wird immer die [2] addiert.

Durch das Lesen im Buch wurde mir deutlich, was man noch aus den Cayley – Graphen erkennen kann. Interessant finde ich, dass man den Zusammenhang einer Untergruppe und den Nebenklassen erkennen kann.
Wie zum Beispiel bei der Gruppe ($\mathbb{Z}_8$, +).



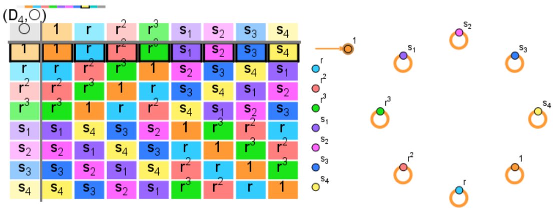
Man erkennt gut, dass die Untergruppe U = {[0], [4]} mit sich selbst vier Nebenklassen erzeugt. Erzeugt man mit dem Element [4] den Cayley – Graphen, erkennt man welche Elemente die Nebenklassen N_1 bis N_4 enthalten.

Außerdem kann man gut erkennen, dass die Nebenklassen gleich viele Elemente enthalten wie die Untergruppe. Es lässt sich auch erkennen, dass die Nebenklassen

Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, http://www.springer.com/series/11632

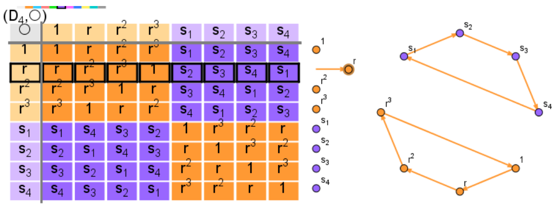
keine Gruppen sein können, da die Nebenklassen bis auf die Untergruppe selbst, nicht das neutrale Element enthalten. Interessant daran finde ich, dass die Untergruppe Nebenklassen bildet. Bis zu diesem Zeitpunkt haben wir nur untersucht, ob und wie viele Untergruppen einer Gruppe existieren. Haben wir eine Untergruppe gefunden, waren die anderen Elemente sozusagen nicht mehr interessant. Umso mehr war ich überrascht, dass man die restlichen Elemente zu Nebenklassen zusammenschließen kann mit gleich vielen Elementen wie die Untergruppe.
In der Übungsstunde wurde dann noch der Satz von Lagrange eingeführt. Dieser besagt, dass es nur so viele Untergruppen geben kann, wie es Teiler gibt, da die Nebenklasse gleich viele Elemente enthalten wie die Untergruppe selbst.
Untersucht man zum Beispiel die Gruppe (D_4, +) auf Untergruppen kann man folgendermaßen vorgehen:
Als erstes bestimmt man die Teiler von 8, da die Gruppe (D_4, +) 8 Elemente besitzt. Die Teiler von 8 sind 1, 2, 4 und 8. Dann weiß man, dass es eine Untergruppe mit 1 Element gibt, mindestens eine Untergruppe mit 2 Elementen und mindestens eine Untergruppe mit 4 Elementen und eine Untergruppe mit 8 Elementen gibt.

Die Untergruppe mit 1 Element ist die Untergruppe $U_1 = \{1\}$. Da die Nebenklassen gleich viele Elemente enthalten als die Untergruppe selbst, weiß man, dass es mit der Untergruppe als Nebenklasse 8 Nebenklassen gibt, da 8 : 1 = 8 ist.



Anzahl der Nebenklassen.

Anzahl Elemente der Untergruppe.



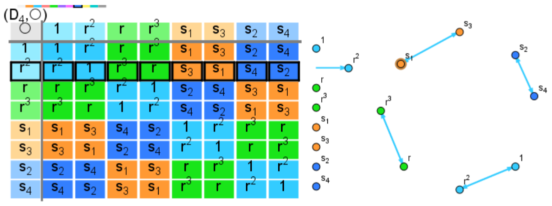
Die Untergruppe mit 4 Elementen ist $U_2 = \{1, r, r^2, r^3\}$. Da die Nebenklasse gleich viele Elemente als die Untergruppe besitzt ergibt sich die Nebenklasse aus den anderen Elementen. Da die Untergruppe selbst auch eine Nebenklasse ist, gibt es zwei Nebenklassen, wenn eine Nebenklasse 4 Elemente enthält, da 8 : 4 = 2

Anzahl Elemente der Untergruppe.

Anzahl der Nebenklassen.

Es existieren weitere Untergruppen mit 4 Elementen: $U_3 = \{1, r^2, s_1, s_3\}$ und $U_4 = \{1, r^2, s_2, s_4\}$. Die Untergruppe U_3 und U_4 enthalten jeweils ebenfalls mit sich selbst zwei Nebenklassen.

Die Untergruppe mit 2 Elementen ist $U_5 = \{1, r^2\}$. Bei der Untergruppe mit 2 Elementen gibt es vier Nebenklassen, da 8 : 2 = 4. Es existiert die Untergruppe U_3 selbst als Nebenklasse und drei weitere Nebenklassen. Es existieren auch die Untergruppe $U_6 = \{1, s_1\}$, $U_7 = \{1, s_2\}$, $U_8 = \{1, s_3\}$,



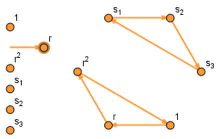
Erscheint in: Kersten & Halverscheid (Hrsg.) *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*, http://www.springer.com/series/11632

$U_9 = \{1, s_4\}$ mit jeweils zwei Elementen und jede Untergruppe enthält ebenfalls vier Nebenklassen.

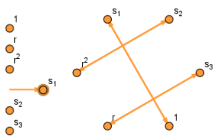
Die Untergruppe mit 8 Elementen ist $U_8 = \{1, r, r^2, r^3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Dies ist zugleich auch die Gruppe selbst. Es gibt dann auch nur eine Nebenklasse, die Untergruppe selbst, da 8 : 8 = 1.

Der Satz von Lagrange war eine sehr herausstechende Erkenntnis dieser Erkundung, da man für jede Gruppe schnell sagen kann, wie viele Untergruppen existieren und wie viele Elemente diese enthalten. In den vorherigen Erkundungen kam ich auf Untergruppen nur durch ausprobieren. Dies war zeitintensiv, da man alle möglichen Kombinationen der Elemente einer Gruppe auf die Gruppeneigenschaften untersuchen musste.

In dieser Erkundung 5.5 war der Erkenntnisgewinn über ausprobieren verschiedener Cayley – Graphen und durch die Umordnung der einzelnen Punkte, die ein Element aus der Gruppe darstellten. Außerdem beobachtete ich, wie sich die Pfeile des Graphen verändern, wenn ich den Graphen durch unterschiedliche Elemente erzeugte und schaute welche Zykel sich bei welchen Elementen ergeben.



Erzeugt man zum Beispiel in der Gruppe (D_3, +) mit dem Element r ein Cayley – Graphen ergeben sich zwei Dreierzyklen.



Es entstehen drei Zweierzyklen, wenn man den Cayley – Graphen der Gruppe (D_3, +) mit dem Element s_1 erzeugt.

Bei diesem Beispiel ist der Unterschied durch den Satz von Lagrange zu erklären. Dabei versuchte ich die verschiedenen Graphen zu deuten, also wie die Cayley – Graphen zustande kommen und was sie bedeuten.

Schüler und Schülerinnen können das gleiche Erfolgserlebnis haben, wenn man Abbildungen im Unterricht einsetzt und die Schüler und Schülerinnen versuchen diese Abbildung zu deuten. Dies kann man zum Beispiel bei Funktionen einsetzen. Man gibt den Schülerinnen und Schüler einen Graphen einer Funktion und die Schüler und Schülerinnen müssen dann mit Hilfe dieses Graphen die Funktionsgleichung bestimmen. Für den Mathematikunterricht nehme ich durch die Erkundungen auch mit, dass es schwierig ist die eigenen Gedanken verständlich aufzuschreiben. Dabei finde ich es schwierig, die Gedanken und Erkenntnisse der Reihenfolge nach zu sortieren um es für den Leser verständlich aufzuschreiben. Ich denke, dass dadurch auch kleine Missverständnisse entstehen könnten. Die Schüler und Schülerinnen könnten es richtig verstanden haben, jedoch nicht verständlich genug ausdrücken, was sie denken. Um dies zu umgehen, hilft es bei den Schüler und Schülerinnen nachzufragen und Rücksprache zu halten, wie wir dies in der Vorlesung und Übung getan haben.

Dieses zweite Beispiel demonstriert, wie tief eine Studierende durch ein induktives, beispielbezogenes Vorgehen in die Strukturen von Gruppen (hier: Nebenklassen) vordringen kann, und dabei einer zentralen Begriffsbildung, dem Normalteiler phänomenologisch auf die Spur kommen kann. Ein solches Vorgehen entspricht nicht nur genetisch dem historischen Ursprung des Normalteilerbegriffs (vgl. Edwards, 1984), sondern bildet auch die vorstellungsbezogene Basis für eine formale Definition, die dann allerdings nicht individuell von jedem

Studierenden erwartet werden kann. An dieser Stelle hat wieder eine strukturierende und durchaus dozierendenzentrierte Lehrform ihre Berechtigung.

5 Literatur

Carter, N. C. (2009). *Visual group theory*. Washington: Mathematical Association of America.

Edwards, H. M. (1984). *Galois theory*. New York: Springer-Verlag.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1. Stuttgart: Klett Verlag.

Holzäpfel, L., Bernack, C., Leuders, T., & Renkl, A. (2013). Schreiben, forschen und reflektieren in der Mathematiklehrerausbildung: Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen in der Grundschullehrerbildung. In I. M. D. M. Kobarg, C. Fischer, F. Trepke & M. Menk (Ed.), *Maßnahmen zur Lehrerprofessionalisierung wissenschaftlich begleiten - verschiedene Strategien nutzen. Münster* (pp. 15-34). Münster: Waxmann.

Leuders, T. (2015). Gruppen als Modelle – Horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse. In G. Kaiser & H.-W. Henn (Eds.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (pp. 217-231): Springer Fachmedien Wiesbaden.

Leuders, T. (2016). *Erlebnis Algebra – zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Heidelberg: Springer

Leuders, T. (2016). Subject Matter Analysis with a Perspective on Teacher Education – The Case of Galois Theory as a Theory of Symmetry. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37* (Supplement 1), 163-191.

Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S., & Barzel, B. (2012). Genetische Lernarrangements entwickeln – Vom Möglichem im Unmöglichen bei der Entwicklung der Mathewerkstatt. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, 541-544.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525): Springer Netherlands.

Weber, K., & Larsen, S. (2008). Teaching and learning group theory. In: Carlson, M. P., & Rasmussen, C.: *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 139-155). Washington: Mathematical Association of America.