Analysis I
didaktisch durchdacht

R. Oldenburg, Augsburg

Vorab

- Reformbedarf in der Fachmathematikausbildung
- Aber: Konservative Randbedingungen
  - Meyerhöfer in Mitteilungen der DMV: „kollektive professionelle Verweigerungshaltung“ gegenüber Änderungen an Anfängerveranstaltungen
- Bescheidenes Ziel: Problemlösung

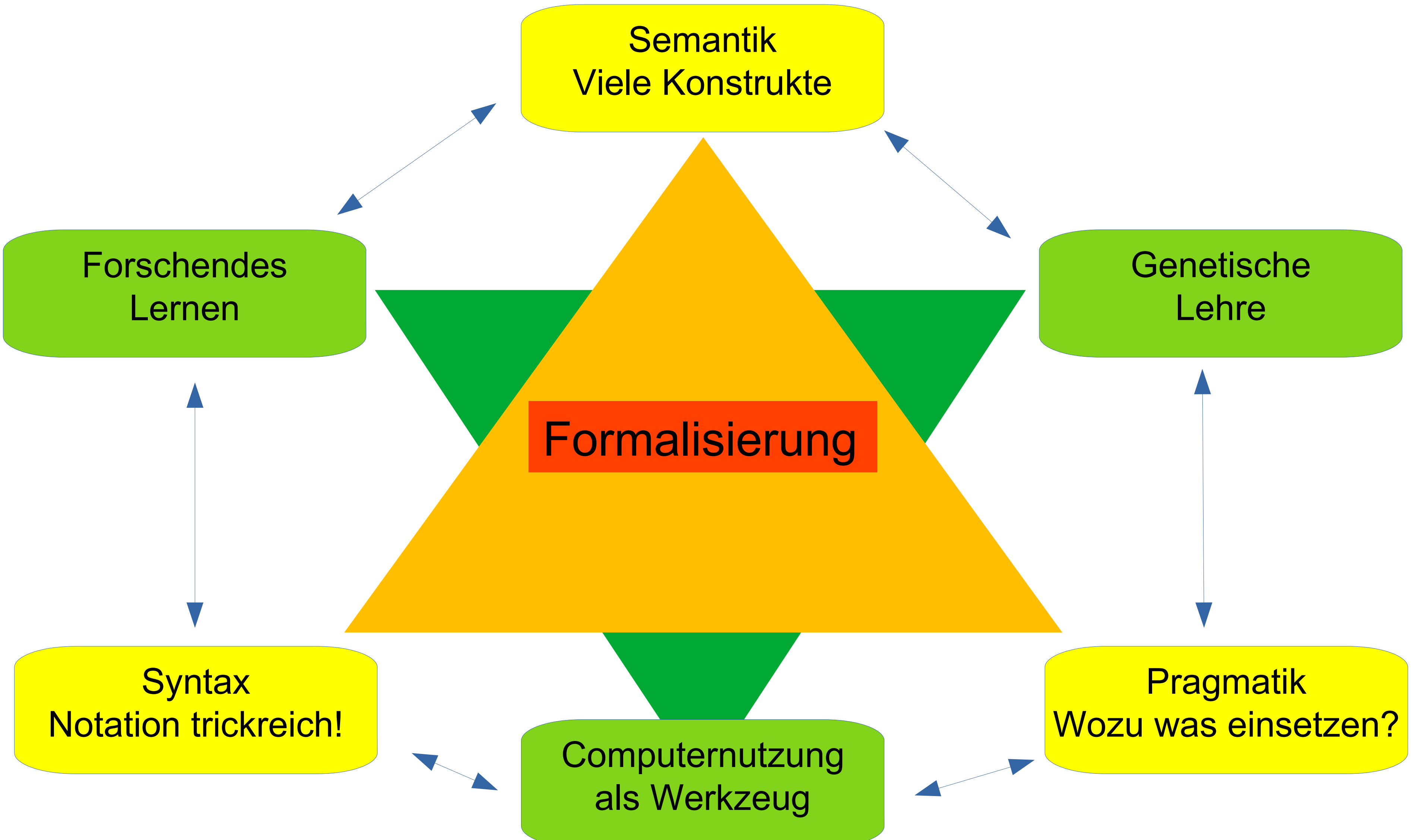
Kontext

- Es gibt viel Literatur zu Lernschwierigkeiten im ersten Semester
  - Conceptual change (zB Verschaffel)
  - Formale Sprache (zB Selden&Selden 1995, Dietz 2015)
  - Beweise (zB Moore 1994)
  - Argumentation (zB Kempen und Biehler 2014)
  - Motivation und Lernverhalten (zB Ufer 2015)
- Was tun?
  - Beweise: verstehen ↔ validieren ↔ erstellen
  - Alcock: syntaktische und semantische Strategien
  - Strategien (Ableitinger &Hermmann; Paderborn (Frischemeier et al))
- Warum neue Studie?
  - Lokal aber passgenau: Probleme der <u>Augsburger</u> Studis
  - Spezifisch: Probleme in Analysis I
  - Konstruktiv

Rahmen

- Ein Didaktiker liest Ana I im SoSe 2018, 2019, 2020
- Design based reserach
  - 3 Durchgänge
  - Echtzeitevaluation, Evaluation, Übungen, Klausur… und:
  - Kleine Längsschnittstudie: Im WS 2018/19 wurden 5 Studierende „verfolgt“
    - Langzeitstudie: 1 Semester, jede Woche 30 Min Einzelinterviews
  - Ergebnisse kurzgefasst: Komplexe Problemstruktur…

Problemaufriss



Ergebnisse: Theorien

- Gemeinsamer Kern vieler Schwierigkeiten: **Verknüpfung von Vorstellungen und formalen Beschreibungen**
  - Vgl. concept image und concept definition nach Tall&Vinner
  - Nützlichkeit der Beziehungen zu GVen

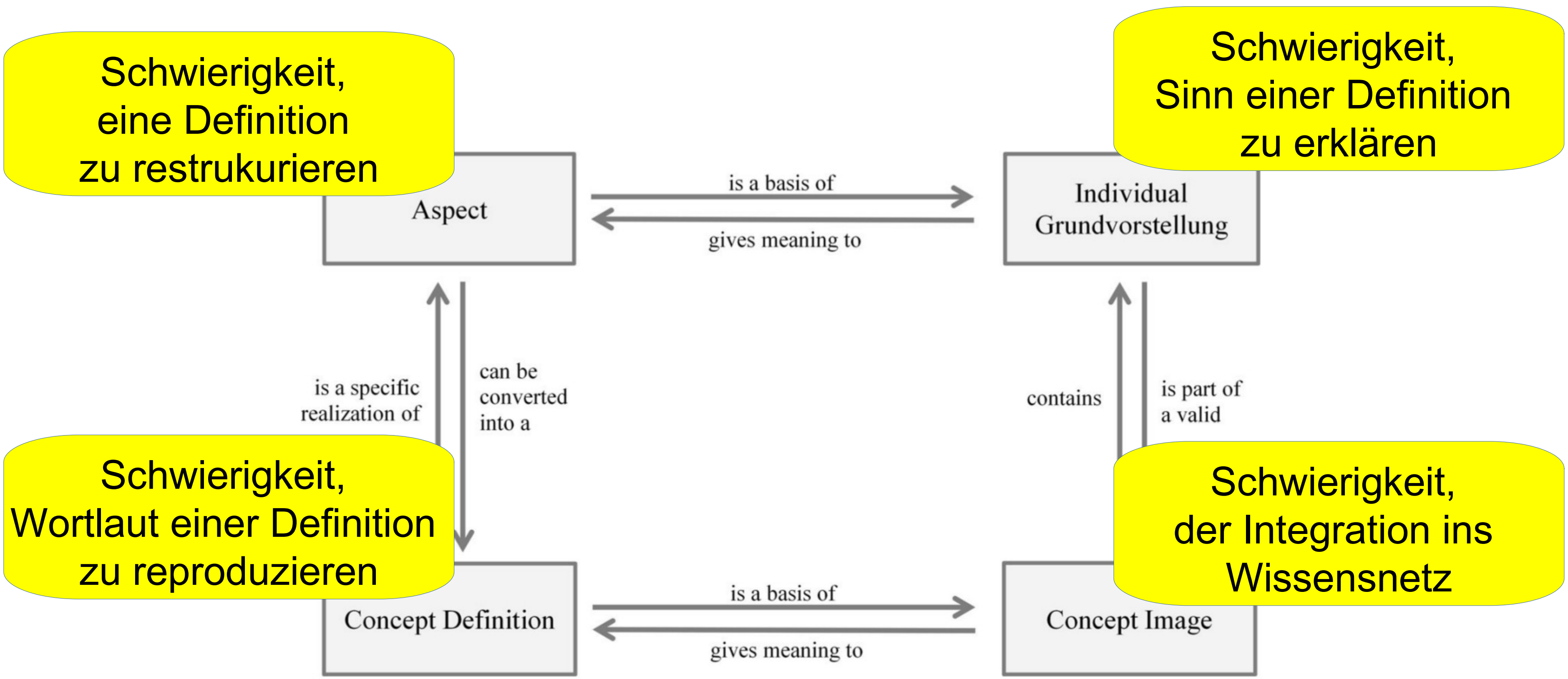


Fig. 1 Relations between aspect, Grundvorstellung, concept definition, and concept image

Ergebnisse: Theorien

- Ebenfalls nützlich zum Verständnis der SuS: Sichtweise: **Begriffsbildung und Formalisierung als Formen des Modellbildens**
  - Informelle/Intuitive Konzepte werden formalisiert, um sie logischer Analyse zugänglich zu machen

Größter HP
Einer Folge

…stellung:
Viereck, Prototypen,
Eigenschaften

Präzisierung
Formalisierung

$\limsup_n a_n =$
$\lim_n \sup(\{a_i | i > n\})$

Definition
Viereck ist..

Abgleich
- konfirmatorisch
…fligierend

Deduktion

Falls $\{a_n\}_n$ beschränkt
$\limsup_n a_n = \max\{HP(a)\}$

Eigenschaften

Anwendung

$\limsup_n a_n =$
$\inf_n \sup_{k>n} a_k$

Sätze,….

Problemfelder und Maßnahmen

- Fülle der Definitionen und Sätze
  - Überblicksdateien zu 3 Zeitpunkten
  - Abhängigkeitsgraphen an der Tafel (z.B. verschiedene Charakterisierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)
- Orientierungslosigkeit : Wozu macht man das?
  - Use cases (z.B. Wozu verwendet man den Mittelwertsatz?)
  - Ausblicke (z.B. Fixpunktsätze)
- Allgemein: Genetische Strukturierung
- Forschendes Lernen
- Jetzt Einzelfragen

Problemfeld: Logik

- Beispiel $\forall\varepsilon>0: \exists\delta>0 \ldots\ldots|\ldots|<\delta \Rightarrow |\ldots|<\varepsilon$
  - Sprachlich gerne als „Für jedes beliebig kleine ε...“, aber: Beliebig groß auch erlaubt???
    - Im Verlauf der Rechnung: $\delta<\varepsilon/(1-\varepsilon)$. Fall $\varepsilon\geq 1$??
    - Verschärft durch Ableitinger/Herrmann, dort Fallunterscheidung $(\varepsilon>3)$
  - ε wird vorgegeben. Wieso kann man an δ einfach Forderungen wie $(\delta<1)$ stellen?
  - δ steht im Einflussbereich des Allquantors, hängt also von ε ab. Formal mit Skolem-Funktion: $\exists\delta:\mathbb{R}^+ \rightarrow\mathbb{R}^+ : \forall\varepsilon>0: \ldots\ldots|\ldots|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow |\ldots|<\varepsilon$
    - Da die Abhängigkeit oft übersehen wird: Skolem-Funktionen explizit schreiben?

Problemfeld: Logik

- Lesen und Interpretieren quantisierter Formeln schwierig
  - Analyse und Synthese üben
  - Negation üben, bei jedem Begriff
- Ein Problem: Bedeutung von freien Variablen
  - Oft implizite Quantisierung (Shipman 2016)
- Problembehandlung vielfältig
  - Lesehilfen (vgl. Dietz)
  - Computerbasiertes Übungsfeld

Problemfeld: Logik

- Wie kann man Studenten ausreichend Übungsmöglichkeiten mit Quantoren geben?
- Quantorenelimination in CAS
  - Altes Thema: Tarski 1948
  - Didaktisch: Oldenburg 2015
- Realisierung: Mathematica Online
  - Freiwillige Computerbasierte Übungsaufgaben

Problemfeld: Logik

Blatt 3 Aufgabe 7: (Besprechung in der Globalübung)
In Wolfram/Mathematica haben die beiden Eingaben

```
Resolve[ ForAll[x, ForAll[y, Implies[x^2 == y^2, x == y]]], Reals]
Resolve[ ForAll[x, ForAll[y, Implies[x^3 == y^3, x == y]]], Reals]
```

unterschiedliche Ausgaben zur Folge. Erklären Sie das.
Die Ausgabe von

```
Resolve[ ForAll[a,
  Implies[a > 0,
   Exists[x0, ForAll[x, Implies[x > x0, x/(x - 1) < a + b]]]]], Reals]
```

ist: $1-b\leq 0$. Erklären Sie das!
Geben Sie ein : `f[x_] := 1 - x^2 - x; Resolve[ForAll[x, f[x] <= f[x0]], Reals]`
Lassen Sie sich den Graph zeichnen mit `Plot[f[x],{x,-3,3}]`
Untersuchen Sie ähnlich andere einfache Funktionen. Wie könnte man prüfen, ob eine Funktion genau ein Maximum hat?

Blatt 11 Aufgabe 8: Prüfen Sie für einige einfache Funktionen die Differenzierbarkeit mittels Mathematica auf drei Arten:
1) Mit dem D-Befehl. Beispiel: `D[x^2,x]`
2) Mit dem Limit Befehl. Bsp: `f[x_]:=x^2; Limit[(f[x+h]-f[x])/h, h->0]`
3) Mittels „Epsilontik“ und dem `Resolve`-Befehl.

Problemfeld: Logik

- Effekte?
- Schwierigkeit: Versuchsdesign, Datenschutz….
- Lösung:
  - Computeraufgaben freiwillig, abfragen: 2 Gruppen
  - Computerferne Aufgaben vs. Papier-Aufgaben, die etwas abfragen, was man mit Computeraufgaben lernen kann

Problemfeld: Log

Nur kleiner Effekt
MMA-Gruppe besser, d=0.10

A Aufgabe 2: (5 Punkte) Beweisen Sie: Wenn $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $\exists c>0 : \exists d>0 : \forall x \geq d : f'(x) > c$, dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Folgerung nicht gilt, wenn nur gefordert wird $\forall x \geq d : f'(x) > 0$.

A Aufgabe 3: ((2+4)+(4+2)+(3+2) Punkte) Alternativen fürs Differenzieren (diese Alternativen sind in der Tat eine Bereicherung im Gegensatz zu den rechtsradikalen Alternativen mit ähnlicher Abkürzung)

a) Man nennt eine Funktion symmetrisch differenzierbar in x_0, wenn der folgende Grenzwert existiert: $f^{\sim}(x_0) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

a_1) Leiten Sie damit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ab.

a_2) Prüfen Sie, welche der Implikationen gelten: $\exists f^{\sim}(x_0) \Rightarrow \exists f'(x_0)$ und $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists f^{\sim}(x_0)$.

b) Eine andere Art von Ableitung kann so definiert we

$$f^*(x_0) := \lim_{q\to 1} \frac{f(q\cdot x_0) - f(x_0)}{q\cdot x_0 - x_0}$$

b_1) Berechnen Sie diese Ableitung für von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2, \ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

b_2) Prüfen Sie Äquivalenz zur üblichen Definition der Ableitung.

Signifikanter Effekt p=0.007
MMA-Gruppe besser, d=0.41

Ableitung

- Aus Schule bekannt $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Anknüpfen oder anders?
- Anders! Warum?
  - Wird zwar in S benutzt, aber eher oberflächlich.
  - Quotient ist relativ komplex, ebenso Argumente damit: Lokale Änderungsrate als didaktischer Fehler?!
  - Geringe Generalisierbarkeit.
- Deswegen: Ableitung ala Caratheodory

$$f \text{ differenzierbar in } x_0 \Leftrightarrow$$
$$\exists q : U \to \mathbb{R}, \text{ stetig in } x_0 \in U \wedge \forall x \in U : f(x) - f(x_0) = q(x) \cdot (x - x_0)$$

Ableitung

Lokale Linearisierung

$$f(x)=f(x_0)+q_{x_0}(x)\cdot(x-x_0)\approx f(x_0)+q_{x_0}(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Differentiale

GV Verstärkungsfaktor

$$f(x)-f(x_0)=q_{x_0}(x)\cdot(x-x_0)$$

$$\Delta y=q_{x_0}(x)\cdot\Delta x\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

Stetige Fortsetzung des Diffquotienten

$$q_{x_0}(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Nichtlineare Proportionalität

Ableitung

- Vorteile
  - Approximationsgesichtspunkt
    - stetige Funktionen: lokal konstant
    - differenzierbare Funktionen: lokal linear
  - differenzierbar impliziert stetig: klar
  - Kettenregel trivial
  - Produktregel ohne Tricks
- Aber Achtung:
  - Viele S vermuten, q müsse auf ganz U stetig sein
  - Folge: Vermutung: Jede Funktion sei stetig diffbar

Approximation und Integral

- Augsburg: Integration kann nach Ana II verschoben werden (Kollegenbeschluss: Tendenziell soll), Approximation: Nur Taylorreihen
- Genetischer Gesichtspunkt: Praktische Berechenbarkeit: Grundrechenarten, alles andere zB durch Taylorpolynome
  - Approximation als zentrale Idee
- Weitere Approximationstechniken?
  - Hängt ab von Funktionsklasse!
  - Stetig auf [a,b] ⇒ Gleichmäßig stetig, also zu jedem $\varepsilon > 0$ durch Treppenfunktionen oder stückweise affin-lineare Funktionen approximierbar
  - Dann auch durch Polynome
  - Weierstraßcher Approximationssatz

Approximation und Integral

- Weierstraßcher Approximationssatz
  - 2. Beweis mit Bernsteinpolynomen: Computereinsatz.
- Integral (aus Schule bekannt)
  - GV orientierter Flächeninhalt / GV Rekonstruktion / GV Kumulation
- Alle GV führen für Treppenfunktionen auf die gleiche Definition: Summe
- Falls sich eine Funktion durch Treppenfunktionen approximieren lässt $t_n \to f \text{ glm. auf } [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

Approximation und Integral

- Viele Integral-Eigenschaften elementar beweisbar
- HDI folgt aus

$$(b-a)\cdot \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

- Vorteile des Regel-Integrals
  - Mehrere Beweise gehen ähnlich: Transfer
  - Untechnisch
  - Leistungsfähig genug (zunächst) für die Physik

Problemfeld: Begriffe

- **Beispiel: Supremum**
  - **Grundsensibilität**: Erkenne ich das richtig? (Syntax)
    - Bsp: sup(M): Urbild von M oder Bild der Umkehrfunktion?
  - **Grundvorstellung**: Was ist das? Sinngebung (Semantik)
    - Supremum als Verallgemeinerung vom Maximum
  - **Grundoperation**: Wie arbeite ich damit? (Pragmatik)
    - Kleinere Zahl ist keine obere Grenze
- Aufgabe: Supremum visualisieren!

Problemfeld: Begriffe

- Studentin etwa 2 Wochen nach Einführung von inf/sup
  - Grundsensibilität: „$A=\{(n+1)/n \mid n\in \mathbb{N}\}$
    Wie kann man A beschreiben?“ : max(A)=2,…, inf(A)=1
  - Grundvorstellung: Was ist das? S: „Das Infimum ist so etwas wie das Minimum, nur dass es nicht zur Menge gehören muss.“ Sinngebung
  - Grundoperation: HIER wird es schwierig
  - 1. Versuch inf(M) zu formalisieren: $\forall x < \inf(M) : x \notin M$
  - 2. Versuch: Def a:=inf(M) $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad a+t \in M$
  - 3. Versuch: $\forall t \in \mathbb{R}^+ \, \exists x \in M : a+t > x$
  - 4. Versuch korrekt nach Hinweis auf *zwei* Bedingungen

Resultate

- Gute Evaluationen
- Klausur: 51% bestanden
- Trotzdem: Die Klausur zeige auch viele Defizite der Vermittlung:
  – Kalkül wurde wohl vernachlässigt, zB (sin(x)cos(x))‘=-cos(x)sin(x)

Offene Fragen / Zukunft

- Gesucht: Gute Allgemeine Theorie des Erklärens
- Mit Funktionen anfangen statt Folgen? (ala Calculus)
  - Pro: Anbindung an Schule
  - Contra: Ohne Reihen hat man kaum Funktionen präzise